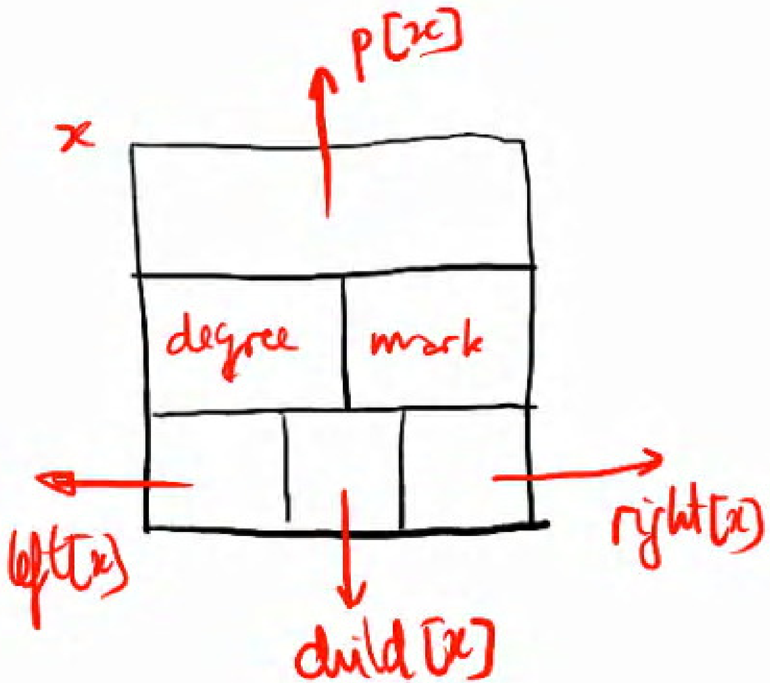
Heap di Fibonacci

- UNO HEAP DI FIBONACCI E' UNA COLLEZIONE DI ALBERI CON LA PROPRIETA' HEAP
- GLI ALBERI DI UNO HEAP DI FIBONACCI NON DEBBONO ESSERE NECESSARIAMENTE ALBERI BINOMIALI

Procedure	Binary heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
MAKE-HEAP	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
INSERT	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$ (*)
MINIMUM	$\Theta(1)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
EXTRACT-MIN	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$ (*)
UNION	$\Theta(n)$	$O(\lg n)$	$\Theta(1)$
DECREASE-KEY	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(1)$ (*)
DELETE	$\Theta(\lg n)$	$\Theta(\lg n)$	$O(\lg n)$ (*)

(*) Costi ammortizzati

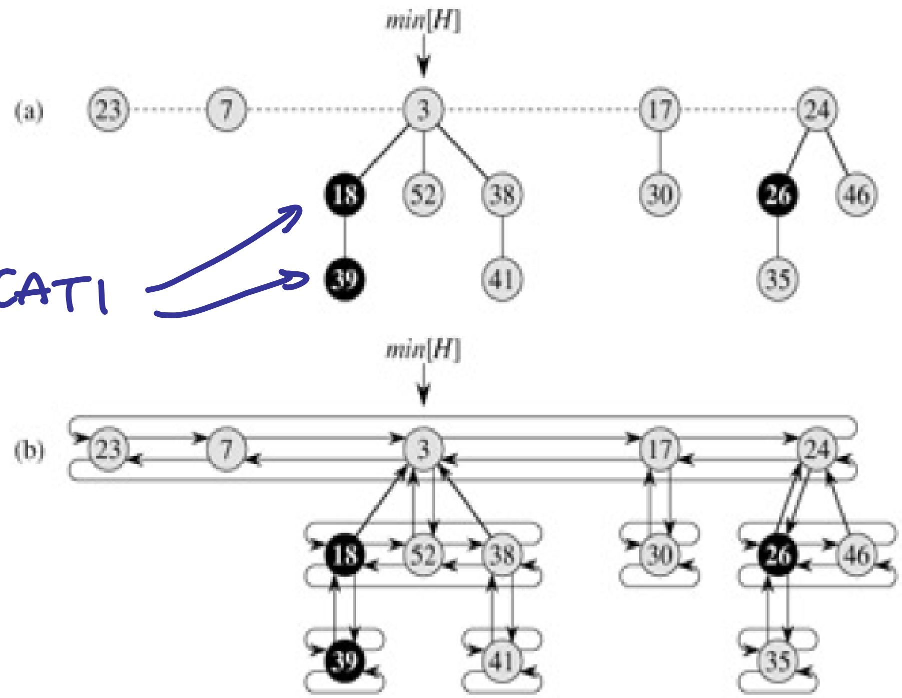


RAPPRESENTAZIONE DI UN NODO

p[x] - padre
left[x] - fratello sinistro
right[x] - fratello destro
child[x] - (un) figlio
degree[x] - numero di figli
mark[x] - indica se il nodo x ha perduto un figlio dall'ultima volta in cui x è diventato figlio di un altro nodo

ESEMPIO

NODI MARCATI



- IL PUNTATORE min[H] INDICA LA RADICE CONTENENTE LA CHIAVE MINIMA E DÀ ACCESSO ALLA STRUTTURA
- VIENE ANCHE MANTENUTO IL CAMPO n[H] CHE CONTIENE IL NUMERO DI NODI IN H

FUNZIONE POTENZIALE

$$\Phi(H) = t(H) + 2\,m(H)$$

DOVE

- $t(H)$ = # ALBERI NELLA LISTA DELLE RADICI DI H
- $m(H)$ = # NODI MARCATI IN H

- SIA $\{H_i\}_{i\in I}$ UNA COLLEZIONE FINITA DI HEAP. PONIAMO:

$$\Phi(\{H_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \Phi(H_i)$$

MASSIMO GRADO DI UN NODO: $D(n)$

- L'ANALISI VERRÀ EFFETTUATA IN FUNZIONE DI UN UPPER BOUND $D(n)$ SUL MASSIMO GRADO DI UN NODO QUALUNQUE IN UNO HEAP CON n NODI
- DIMOSTREREMO CHE SI HA $D(n) = O(\lg n)$

- SE VENGONO ESEGUITE SOLO OPERAZIONI DEL TIPO:
  - MAKE-HEAP
  - INSERT
  - MINIMUM
  - EXTRACT-MIN
  - UNION

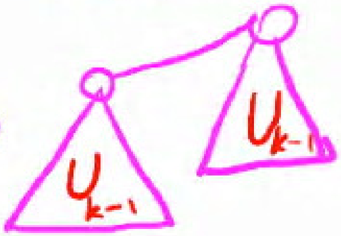
CIASCUNO HEAP DI FIBONACCI E' RAPPRESENTABILE COME COLLEZIONE DI ALBERI BINOMIALI NON ORDINATI

ALBERI BINOMIALI NON ORDINATI

DEFINIZIONE

PER OGNI $k \in \mathbb{N}$ ESISTE UN ALBERO BINOMIALE NON ORDINATO U_k DI GRADO k, DEFINITO IN BASE ALLA SEGUENTE RICORSIONE:

- U_0 E' L'ALBERO FORMATO DA UN SOLO NODO
- DATO U_{k-1} DEFINIAMO U_k COMBINANDO DUE COPIE DI U_{k-1} NELLA SEGUENTE MANIERA:

$U_k \Rightarrow$ 

(NON ORDINATO)

LEMMA (PROPRIETÀ DEGLI ALBERI BINOMIALI NON ORDINATI)

PER OGNI $k = 0, 1, 2, \ldots$ VALGONO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. U_k HA 2^k NODI
2. L'ALTEZZA DI U_k È k
3. U_k HA $\binom{k}{i}$ NODI A PROFONDITÀ i $(i = 0, 1, \ldots, k)$
4. LA RADICE DI U_k HA GRADO k ED OGNI ALTRO NODO IN U_k HA GRADO $< k$. INOLTRE I FIGLI DELLA RADICE DI U_k SONO RADICI DI $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{k-1}$ (IN QUALCHE ORDINE) ∎

- SI OSSERVI CHE DAL LEMMA PRECEDENTE SEGUE IMMEDIATAMENTE CHE $D(n) = O(\lg n)$ ALMENO QUANDO LO HEAP E' FORMATO SOLTANTO DA ALBERI BINOMIALI NON ORDINATI

- LA STRATEGIA DI MANTENIMENTO DEGLI HEAP DI FIBONACCI PREVEDE DI RITARDARE IL LAVORO IL PIÙ POSSIBILE

MAKE-FIBONACCI-HEAP( )

```
H := allocate_node();
n[H] := 0;
min[H] := NIL;
return [H]
```

COMPLESSITA':

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t = 0 \\ \Delta m = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta \Phi = 0$$

PERTANTO: $\hat{c} = c + \Delta \Phi = c = O(1)$

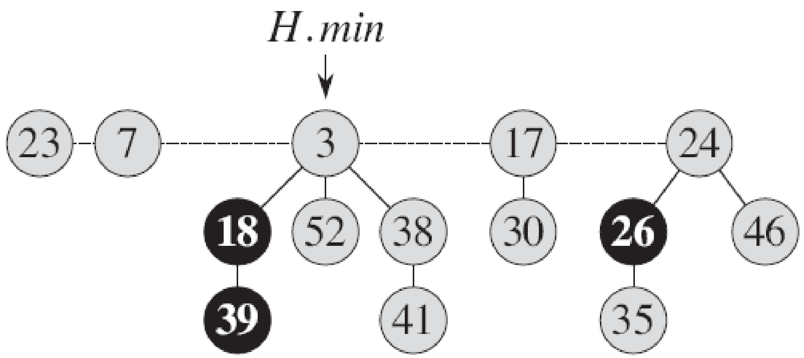
```
FIB-HEAP-INSERT(H, x)
  degree[x] ← 0
  p[x] ← NIL
  child[x] ← NIL
  left[x] ← x
  right[x] ← x
  mark[x] ← FALSE
  concatenate the root list containing x with root list H
  if min[H] = NIL or key[x] < key[min[H]]
     then min[H] ← x
  n[H] ← n[H] + 1
```

COMPLESSITA'

$\Delta t = 1$, $\Delta m = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 1$

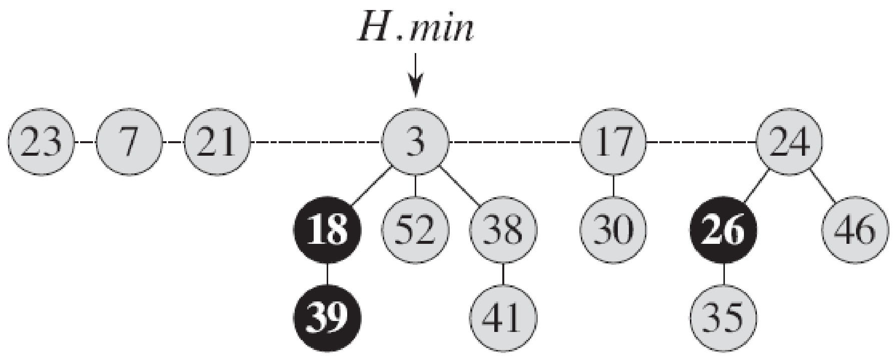
$\hat{c} = c + \Delta \phi = c + 1 = O(1)$

ESEMPIO



FIB-HEAP-INSERT (H, x)

(CON key[x] = 21)



MINIMUM(H)

return (min[H])

<u>COMPLESSITA'</u>

$\Delta\phi = 0$

$\hat{c} = c + \Delta\phi = c = \Theta(1)$

UNION

key[min[H_2]] < key[min[H_1]]

FIB-HEAP-UNION(H_1, H_2)

$H \leftarrow$ MAKE-FIB-HEAP()
$min[H] \leftarrow min[H_1]$
concatenate the root list of H_2 with the root list of H
if ($min[H_1]$ = NIL) or ($min[H_2] \neq$ NIL and $\cancel{min[H_2] < min[H_1]}$)
  then $min[H] \leftarrow min[H_2]$
$n[H] \leftarrow n[H_1] + n[H_2]$
free the objects H_1 and H_2
return H

COMPLESSITA':

$$\left.\begin{array}{l}\Delta t = 0 \\ \Delta m = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta\Phi = 0$$

PERTANTO: $\hat{c} = c + \Delta\Phi = c = \Theta(1)$

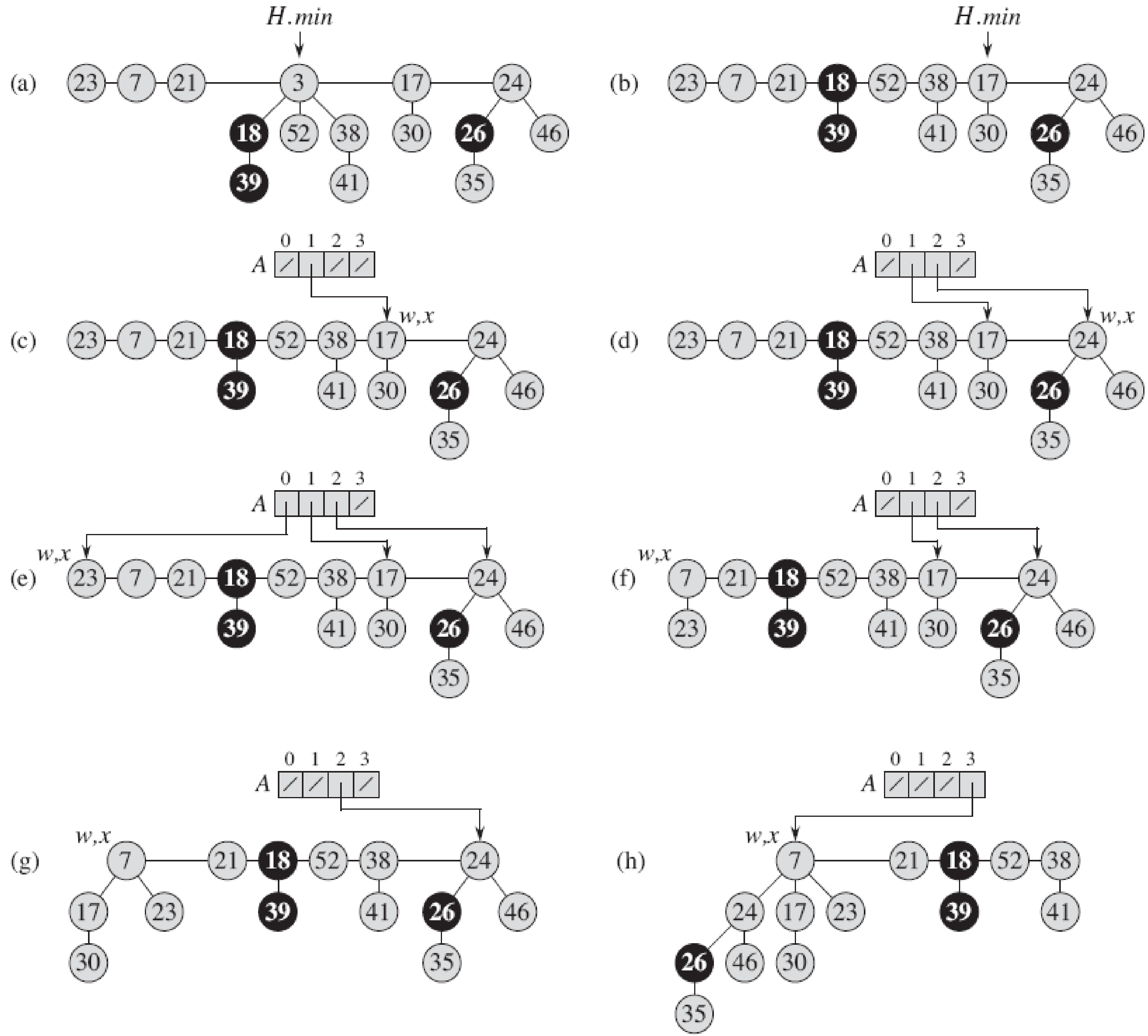
EXTRACT-MIN

```
FIB-HEAP-EXTRACT-MIN(H)
  z ← min[H]
  if z ≠ NIL
      then for each child x of z
               do add x to the root list of H
                  p[x] ← NIL
           remove z from the root list of H
           if z = right[z]
              then min[H] ← NIL
              else min[H] ← right[z]
                   CONSOLIDATE(H)
           n[H] ← n[H] - 1
  return z
```

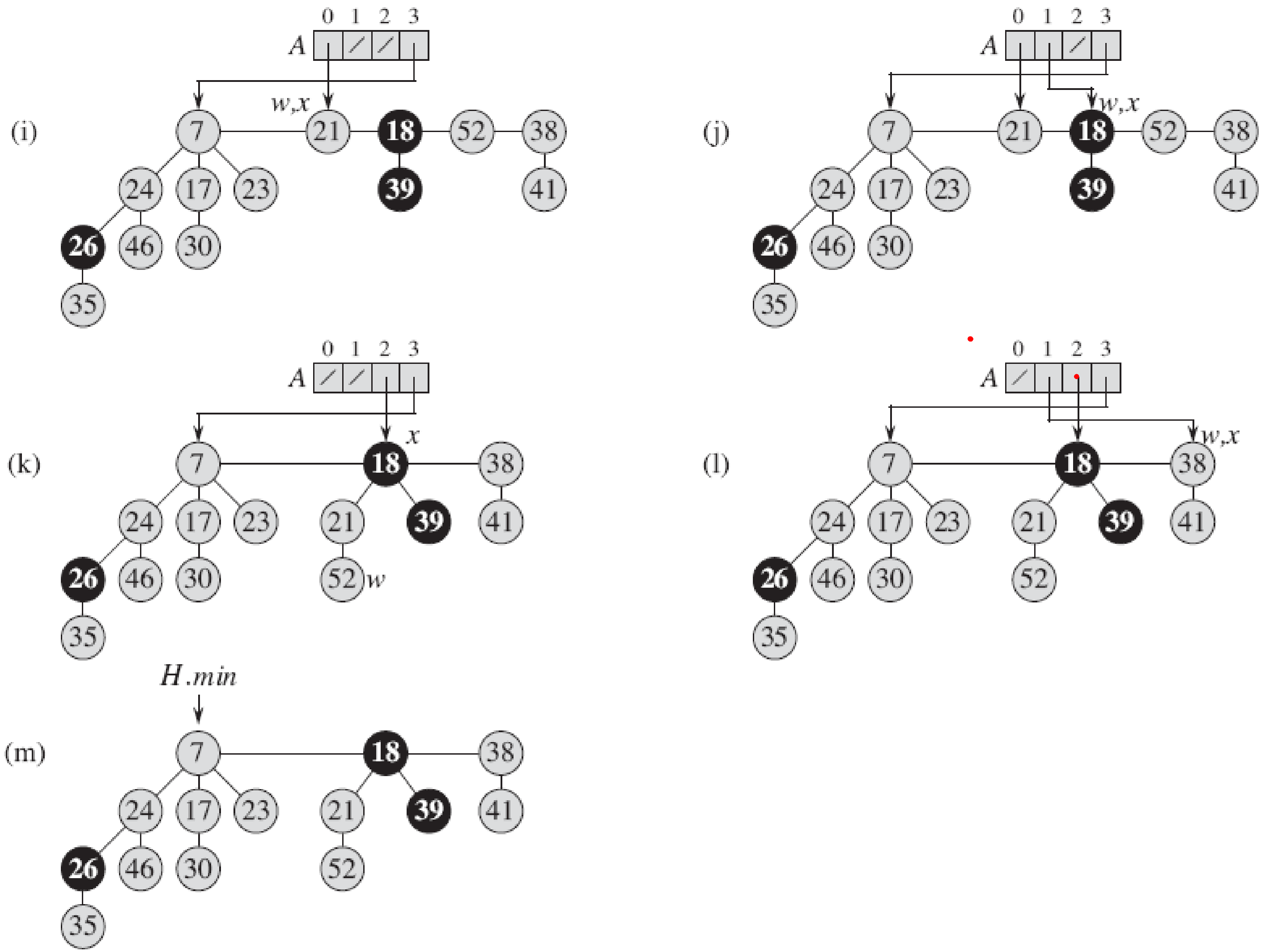
```
CONSOLIDATE(H)
for i ← 0 to D(n[H])
     do A[i] ← NIL
for each node w in the root list of H
     do x ← w
        d ← degree[x]
        while A[d] ≠ NIL
            do y ← A[d]          ▹ Another node with the same degree as x.
               if key[x] > key[y]
                  then exchange x ↔ y
               FIB-HEAP-LINK(H, y, x)
               A[d] ← NIL
               d ← d + 1
        A[d] ← x
min[H] ← NIL
for i ← 0 to D(n[H])
     do if A[i] ≠ NIL
           then add A[i] to the root list of H
                if min[H] = NIL or key[A[i]] < key[min[H]]
                   then min[H] ← A[i]
```

```
FIB-HEAP-LINK(H, y, x)
remove y from the root list of H
make y a child of x, incrementing degree[x]
mark[y] ← FALSE
```

ESEMPIO


H.min
(a) 23 7 21 3 17 24 18 52 38 30 26 46 39 41 35
H.min
(b) 23 7 21 18 52 38 17 24 39 41 30 26 46 35
0 1 2 3
A
w,x
(c) 23 7 21 18 52 38 17 24 39 41 30 26 46 35
0 1 2 3
A
w,x
(d) 23 7 21 18 52 38 17 24 39 41 30 26 46 35
0 1 2 3
A
w,x
(e) 23 7 21 18 52 38 17 24 39 41 30 26 46 35
0 1 2 3
A
w,x
(f) 7 21 18 52 38 17 24 23 39 41 30 26 46 35
0 1 2 3
A
w,x
(g) 7 21 18 52 38 24 17 23 39 41 26 46 30 35
0 1 2 3
A
w,x
(h) 7 21 18 52 38 24 17 23 39 41 26 46 30 35

ESEMPIO (CNTD)



COMPLESSITA' DI FIB-HEAP-EXTRACT-MIN

COSTO REALE $= O\Big(\underset{\uparrow}{D(n)} + \underbrace{D(n) + t(H)}_{\uparrow}\Big)$

$D(n)$: PROCESSAMENTO FIGLI DI min[H]

$D(n) + t(H)$: PROCESSAMENTO LISTA DI RADICI IN CONSOLIDATE

$= O(D(n) + t(H)) = O(n)$

$\Delta t \leq (D(n)+1) - t(H)$, $\quad \Delta m \leq 0$

$\Delta\phi = \Delta t + 2\Delta m \leq D(n) + 1 - t(H)$

$\hat{c} = c + \Delta\phi = O(D(n) + t(H)) - t(H) = O(D(n))$

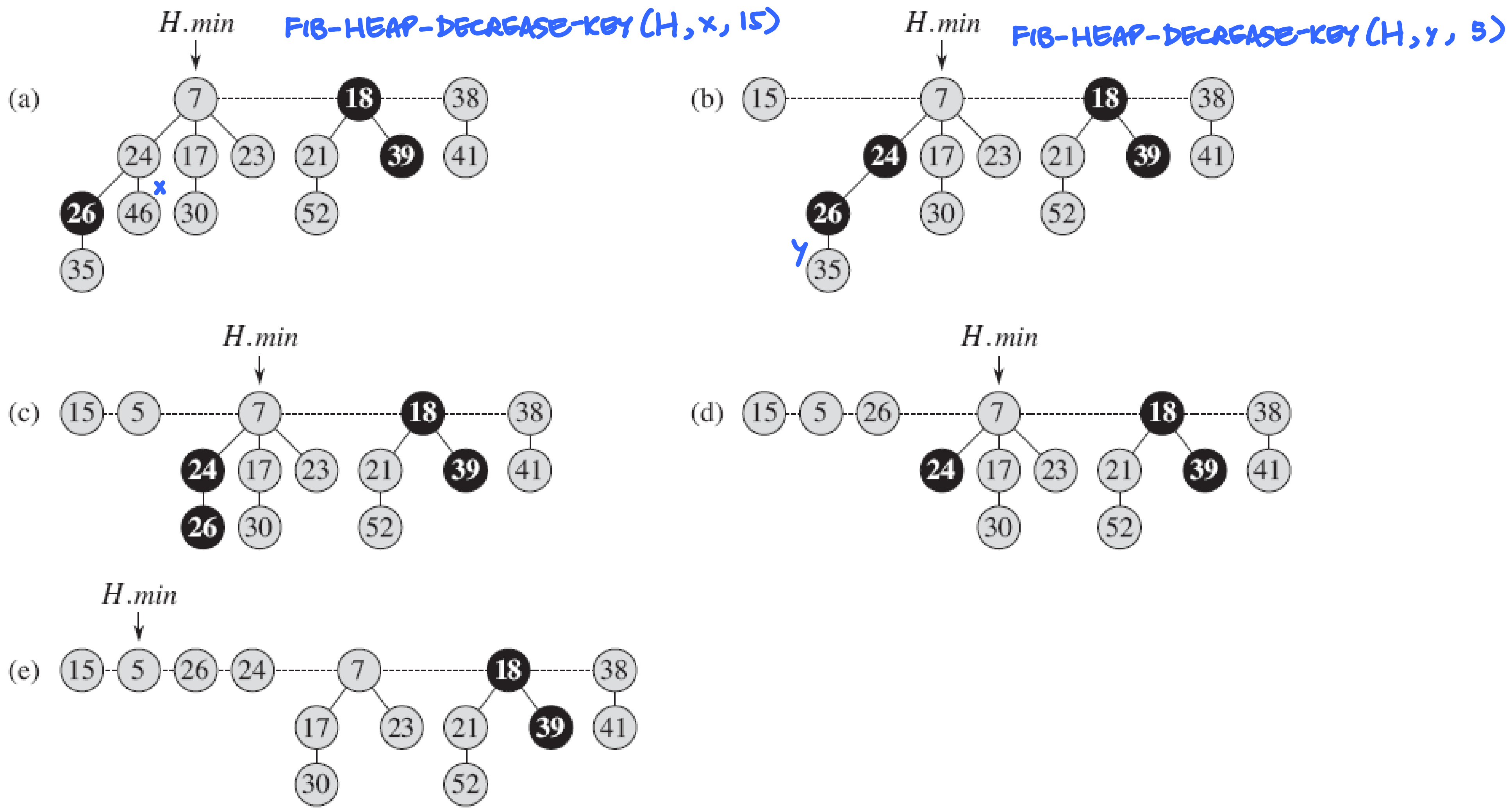
(PUR DI SCALARE OPPORTUNAMENTE IL POTENZIALE)

DECREASE-KEY

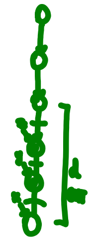
```
FIB-HEAP-DECREASE-KEY(H, x, k)
if k > key[x]
    then error "new key is greater than current key"
key[x] ← k
y ← p[x]
if y ≠ NIL and key[x] < key[y]
    then CUT(H, x, y)
         CASCADING-CUT(H, y)
if key[x] < key[min[H]]
    then min[H] ← x
```

```
CUT(H, x, y)
  remove x from the child list of y, decrementing degree[y]
  add x to the root list of H
  p[x] ← NIL
  mark[x] ← FALSE
```

```
CASCADING-CUT(H, y)
  z ← p[y]
  if z ≠ NIL
     then if mark[y] = FALSE
             then mark[y] ← TRUE
             else CUT(H, y, z)
                  CASCADING-CUT(H, z)
```



FIB-HEAP-DECREASE-KEY (H, x, 15)
FIB-HEAP-DECREASE-KEY (H, y, 5)
(a)
H.min
x
(b)
H.min
y
(c)
H.min
(d)
H.min
(e)
H.min



COMPLESSITA' DI FIB-HEAP-DECREASE-KEY

SUPPONIAMO CHE LA PROCEDURA CASCADING_CUT VENGA CHIAMATA d VOLTE

COSTO REALE $= O(d)$

$$\phi(H) = t(H) + 2m(H)$$

$$\phi(H') \leq (t(H) + d) + 2(m(H) - (d-1) + 1)$$

$$= t(H) + d + 2m(H) - 2d + 2 + 2$$

$$= t(H) + 2m(H) - d + 4$$

$$\hat{c} = O(d) + \phi(H') - \phi(H) = O(d) - d + 4 = O(1)$$

(PUR DI SCALARE OPPORTUNAMENTE IL POTENZIALE)

DELETE

```
FIB-HEAP-DELETE(H, x)
1  FIB-HEAP-DECREASE-KEY(H, x, -∞)
2  FIB-HEAP-EXTRACT-MIN(H)
```

COMPLESSITÀ AMMORTIZZATA $= O(D(n))$

ALCUNE PROPRIETÀ SUI NUMERI DI FIBONACCI

$F_0 = 0 \,, \quad F_1 = 1$

$\underbrace{F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \,,}$ PER $k \geq 2$

LEMMA 1 $\quad F_{k+2} = 1 + \sum_{i=0}^{k} F_i \,,$ PER $k \geq 0$

DIM

CASO BASE $\quad k=0$

$F_{k+2} = F_2 = 0+1 = 1 \,, \quad 1 + \sum_{i=0}^{k} F_i = 1 + \sum_{i=0}^{0} F_i = 1 + 0 = 1$

PASSO INDUTTIVO

$F_{(k+1)+2} = F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1} = 1 + \sum_{i=0}^{k} F_i + F_{k+1} = 1 + \sum_{i=0}^{k+1} F_i \,.$ ∎

LEMMA 2 $F_{k+2} \geq \phi^k$, PER $k \geq 0$

(DOVE $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ E' IL RAPPORTO AUREO)

DIM.

CASO BASE

$k=0 \longrightarrow F_2 = 1, \ \phi^0 = 1$ ✓

$k=1 \longrightarrow F_3 = 2, \ \phi^1 = \phi < 2$

PASSO INDUTTIVO $(k \geq 1)$

$$F_{k+3} = F_{k+1} + F_{k+2} \geq \phi^{k-1} + \phi^k = \phi^{k-1}(1+\phi) = \phi^{k-1} \cdot \phi^2 = \phi^{k+1}$$

IN QUANTO $1 + \phi = \phi^2$

■

STIMA DI $D(n)$

LEMMA 3 SIA x UN NODO IN UNO HEAP DI FIBONACCI E SIA $degree[x] = k$, SIANO $y_1, y_2, \dots, y_k$ I FIGLI DI x NELL'ORDINE IN CUI SONO STATI INNESTATI IN x.
ALLORA $degree[y_i] \geq i-2$, PER $i = 3, 4, \dots, k$.

DIM.

- SIA $i \geq 3$; NOTIAMO CHE QUANDO y_i E' INNESTATO IN x (AL TEMPO T), IL NODO x HA GIA' $y_1, \dots, y_{i-1}$ TRA I SUOI FIGLI, PER CUI $degree_{T-1}[y_i] = degree_{T-1}[x] \geq i-1$. DALL'ISTANTE T, y_i PUÒ AVERE PERDUTO AL PIÙ UN FIGLIO E QUINDI $degree[y_i] \geq i-2$. ■

LEMMA SIA x UN NODO IN UNO HEAP DI FIBONACCI E SIA $degree[x] = k$.

ALLORA $size(x) \geq F_{k+2}$, DOVE $size(x)$ E' IL NUMERO DI NODI NEL SOTTOALBERO RADICATO IN x.

DIM

PONIAMO $$s_j = \min_{\substack{degree[z]=j \\ z \in H \\ H \in \mathcal{H}}} size[z]$$

CON $\mathcal{H}$ FAMIGLIA DI TUTTI GLI HEAP DI FIBONACCI

SI HA: $s_0 = 1$, $s_1 \geq 2$ E $s_{j+1} > s_j$ $(j \in \mathbb{N})$

DIMOSTRIAMO CHE $s_j \geq F_{j+2}$, PER $j = 0, 1, 2, \ldots$

CASO $j = 0$: $s_j = 1$, $F_{j+2} = 1$ ✓

CASO $j = 1$: $s_j \geq 2$, $F_{j+2} = F_3 = 2$ ✓

CASO $j \geq 2$: SIA z UN NODO IN UNO HEAP DI FIBONACCI TALE $degree[z] = j$, $size[z] = s_j$ E SIANO $y_1, y_2, \ldots, y_j$ I FIGLI DI z NELL'ORDINE IN CUI SONO STATI INNESTATI IN z.

$$s_j = size[z] = size[y_1] + size[y_2] + size[y_3] + \ldots + size[y_j] + 1$$

$$\geq 1 + s_{2-2} + s_{3-2} + \ldots + s_{j-2} + 1$$

$$= 2 + \sum_{i=2}^{j} s_{i-2} \geq 2 + \sum_{i=2}^{j} F_i = 1 + \sum_{i=0}^{j} F_i = F_{j+2}.$$

POICHÈ $degree[x] = k$, SI HA

$$size[x] \geq s_k \geq F_{k+2} \quad \blacksquare$$

COROLLARIO $size[x] \geq \phi^{degree[x]}$

COROLLARIO $D(n) \leq \lfloor \log_\phi n \rfloor$, DA CUI $D(n) = O(\log n)$.

DIM SIA x UN NODO IN UNO HEAP DI FIBONACCI CON n NODI.

SI HA: $n \geq size[x] \geq \phi^{degree[x]}$

PERTANTO $degree[x] \leq \lfloor \log_\phi n \rfloor$ E QUINDI

$$D(n) = \max_{\substack{x \in H \\ H \in \mathcal{H}_n}} degree[x] \leq \lfloor \log_\phi n \rfloor \quad \blacksquare$$